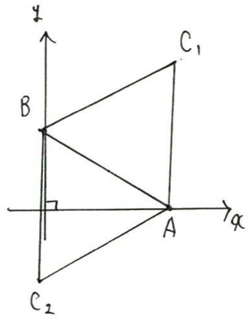
1997年　東大数学　文系第2問　理系第1問　①

(1) 線分ABに対し△ABCが正三角形になるように点Cをとると、2カ所が考えられる。



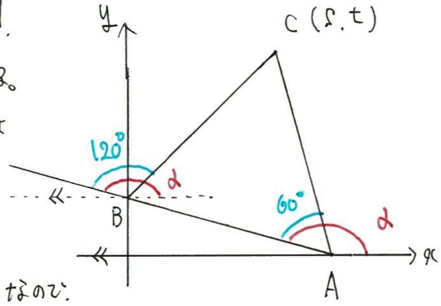
しかし、C_2のように、線分ABに対し原点Oと同じ側に点Cをとり第1象限に入るには、$\angle OAB > 60°$ かつ $\angle OBA > 60°$ が必要となり△OABが直角三角形になることと矛盾する。

よってC_2は考えず、C_1のように線分ABに対して原点と逆側に点Cをとる場合だけ考えればよい。」 Cの場所は1ヶ所のみ

次に、点Cの座標をaとbを使って表現する

解法1　tanの利用

右の図のように角度をとる。直線AB, AC, BCの傾きは $-\frac{b}{a}$, $\frac{t}{s-a}$, $\frac{t-b}{s}$ であり、x軸となす角は α, $\alpha-60°$, $\alpha-120°$ なので、



$$\begin{cases} \tan\alpha = -\dfrac{b}{a} \\ \tan(\alpha-60°) = \dfrac{t}{s-a} \iff \dfrac{\tan\alpha - \tan 60°}{1+\tan\alpha\tan 60°} = \dfrac{t}{s-a} \\ \tan(\alpha-120°) = \dfrac{t-b}{s} \iff \dfrac{\tan\alpha - \tan 120°}{1+\tan\alpha\tan 120°} = \dfrac{t-b}{s} \end{cases}$$

この3つの式から、sとtの値を求めればよい。

$\tan\alpha = -\frac{b}{a}$ を代入して、

$$\begin{cases} \dfrac{-\frac{b}{a} - \sqrt{3}}{1 - \frac{b}{a}\times\sqrt{3}} = \dfrac{t}{s-a} \\ \dfrac{-\frac{b}{a} - (-\sqrt{3})}{1 - \frac{b}{a}(-\sqrt{3})} = \dfrac{t-b}{s} \end{cases}$$

すごく頑張る ⟹

$$\begin{cases} s = \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} \\ t = \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2} \end{cases}$$

実際やりましたが、とても大変でした

解法2　正三角形の定義（3辺の長さが等しい）を利用

AB = BC = CA より

$a^2+b^2 = s^2+(t-b)^2 = (s-a)^2+t^2$

あとは、この連立方程式を解くだけ。

すごく頑張ると…

$s = \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2}$　　$t = \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}$　が求められる。

解法3　複素数平面の利用

$\overrightarrow{AB}$を$-60°$回転したベクトルが$\overrightarrow{AC}$なので、

$\overrightarrow{AB} = (-a, b)$　$\overrightarrow{AC} = (s-a, t)$ より

$(s-a)+ti = (-a+bi)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$(s-a)+ti = (-a+bi)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2}\right)i$

$\therefore$ $s-a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b \iff s = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b$

$t = \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2}$

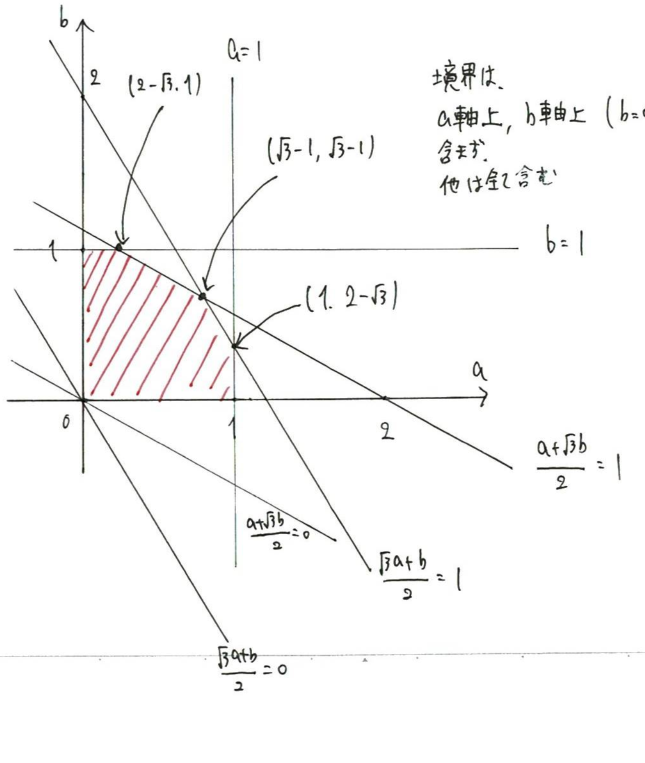
複素数平面が楽
使えるなら、積極的に使いたい。

三角形ABCが正方形Dに含まれるので、

$$\begin{cases} \text{点Aについて、} & 0 \leqq a \leqq 1 \quad \text{かつ} \\ \text{点Bについて、} & 0 \leqq b \leqq 1 \quad \text{かつ} \\ \text{点Cについて} & 0 \leqq s = \dfrac{a+\sqrt{3}b}{2} \leqq 1 \quad \text{かつ} \\ & 0 \leqq t = \dfrac{\sqrt{3}a+b}{2} \leqq 1 \end{cases}$$

となる領域を図示する。

$a>0$, $b>0$ も与えられている。



境界は、
a軸上、b軸上（b=0, a=0）は含まず。
他は全て含む

(2) 三角形 ABC の面積は

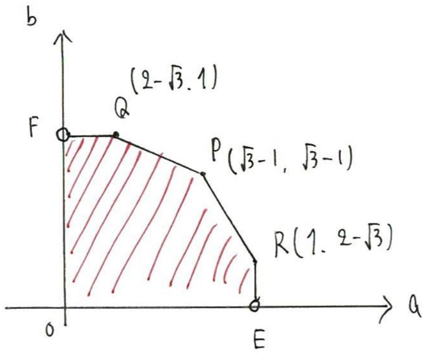
$S = \frac{1}{2} \cdot (1辺)^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times AB^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$

なので、

a^2+b^2 が最大のときに、S が最大となる。

a^2+b^2 は、ab平面上で、原点からの距離を表すので、

(1) で求めた領域の中で、原点から最も遠い点を求めればよい。



左のように点の名前をつける。

$OF = OE = 1$

$OQ^2 = OR^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2 = 1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3}$.

$OP^2 = (\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$

よって $OP = OQ = OR > OE = OF$ である。

よって、S が最大となる (a, b) は

$(a, b) = (2-\sqrt{3}, 1)\ (\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1)\ (1, 2-\sqrt{3})$ の3つ。

S の値は $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}(8-4\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{3} - 3$ //